УДК 517.95

Е. А. Будылина

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время используются различные приближенные модели, описывающие движение газожидкостной смеси, в том числе уравнение Клейна – Гордона. На основе этих моделей проводится изучение акустических свойств жидкостей с пузырьками газа, а также исследование волн конечной амплитуды в смесях с достаточно крупными пузырьками газа. Также известен ряд математических моделей, описывающих нелинейные сейсмические эффекты в геофизических средах, в том числе уравнение синус-Гордона и его модификации. Целью работы было рассмотреть существенные при моделировании сложных систем различной природы вопросы существования и определения решения задачи Коши для возмущенного уравнения Клейна – Гордона и дать оценку относительной погрешности решения задачи Коши в полосе при замене возмущенного уравнения Клейна – Гордона невозмущенным. *Результаты и выводы*. Доказано существование решения задачи Коши в полосе возмущенного уравнения Клейна – Гордона. Получена оценка относительной погрешности решения задачи Коши в полосе при замене возмущенного уравнения Клейна – Гордона невозмущенным. Результаты исследований позволяют находить границы, при которых допустима замена малых по модулю постоянных коэффициентов нулем.

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона, существование решения, относительная погрешность приближенного решения, приложения.

E. A. Budylina

THE STUDY OF THE EXISTENCE AND THE ANALYSIS OF THE CAUCHY PROBLEM SOLUTION FOR THE PERTURBED KLEIN-GORDON EQUATION

Abstract. *Background*. At present time different approximate models for the description of the gas-liquid mix move are used, and the Klein – Gordon equation is one of them. Studying acoustic properties of liquids with bubbles of gas, as well as waves with the finite length in mixes with sufficiently large bubbles is based on these models. Besides, there are a number of mathematical models describing nonlinear seismic effects in geophysical environments, for instance, the sine-Gordon equation and its modifications. The objective of the paper is to study the existence and the Cauchy problem solution for the perturbed Klein – Gordon equation and to determine the relative error of the solution of Cauchy problem when replacing the perturbed Klein – Gordon equation with the non-perturbed one. *Results and conclusions*. The existence of the Cauchy problem solution for the perturbed Klein-Gordon equation has been proved. The relative error of the solution of the Cauchy problem for the perturbed Klein – Gordon equation when replacing the perturbed Klein – Gordon equation with non-perturbed has been determined. The results of the research make it possible to find borders at which it is admissible to replace small constant coefficients with zero.

Key words: the Klein – Gordon's equation, the problem of existence, the relative error of the approximate solution, applications.

Нелинейное уравнение Клейна – Гордона

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) = f(z(x,t)) \quad (1)$$

является одним из классических уравнений теории нелинейных волн (встречается в теории магнетиков, дислокаций, джозефсоновских переходов). Частным случаем является уравнение синус-Гордона:

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) = \sin(z(x,t)). \quad (2)$$

В ряде современных практических применений (например, нестационарный эффект Джозефсона [1], развертывание нитей ДНК [2]) в левой части уравнения синус-Гордона появляется слагаемое с первой производной по времени (возмущение):

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) + a \cdot z'_{t}(x,t) = \sin(z(x,t)) + \sin(3z(x,t)). \quad (3)$$

Иногда при малых интервалах времени этим слагаемым пренебрегают, но при больших интервалах времени это может привести к потере решения специального вида [1] – типа *бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности* (решение вида $\varphi(x,t) = g(x - vt)$, отличное от константы; $g(\xi)$ стремится к константам при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$; $g'(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$; $\lim\limits_{\xi\to\infty} g(\xi)$ не обязательно равен $\lim\limits_{\xi\to-\infty} g(\xi)$).

В настоящее время наблюдается большой интерес к проблеме распространения волн в газожидкостных системах (гидродинамические процессы современной технологии и энергетики, ультразвуковые технологии); реальная жидкость рассматривается двухфазной средой с начальными параметрами газосодержания, соответствующими экспериментальным данным. Используются различные приближенные модели, описывающие движение газожидкостной смеси, в том числе уравнение Клейна – Гордона. На основе этих моделей проводится изучение акустических свойств жидкостей с пузырьками газа, а также исследование волн конечной амплитуды в смесях с достаточно крупными пузырьками газа. Уравнение Клейна – Гордона используется и при описании взрывных неустойчивостей поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле, заряженной поверхности диэлектрической жидкости, тангенциального разрыва по механизму Кельвина – Гельмгольца и др.

Известен ряд математических моделей, описывающих нелинейные сейсмические эффекты в геофизических средах (канонические нелинейные уравнения Бусинеска, Бургерса, Кортевега-де Фриза, Шредингера), в том числе уравнение синус-Гордона и его модификации. В качестве существенных нелинейностей рассматриваются диссипация и дисперсия – основные характеристики геофизической среды и волновых процессов, протекающих в ее пределах.

Обширна библиография по исследованию задач о возмущении уединенных волн. Под *уединенной волной* понимается решение вида $\varphi(x,t) = g(x - vt)$, отличное от константы, если $g(\xi)$ стремится к константам при $\xi \to \pm\infty$ и $g'(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \to \pm\infty$. При этом $g'(\xi)$ меняет знак не более одного раза при изменении ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Наиболее полные результаты получены для диссипативных нелинейных уравнений и для возмущений уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния; для неинтегрируемых методом обратной задачи рассеяния волновых уравнений построены сингулярные асимптотические решения нелинейных уравнений Клейна – Гордона.

Для доказательства отсутствия бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, достаточно получить отрицание хотя бы одного из фактов, перечисленных в определении. Чтобы доказать существование, надо обосновать сходимость интегралов от производной на бесконечности.

В отличие от *солитона*, бегущая волна, сглаживающаяся на бесконечности, не обладает структурной устойчивостью (от обыкновенной бегущей волны ее отличает условие на производную).

Используемая здесь классификация решений приводится на рис. 1.

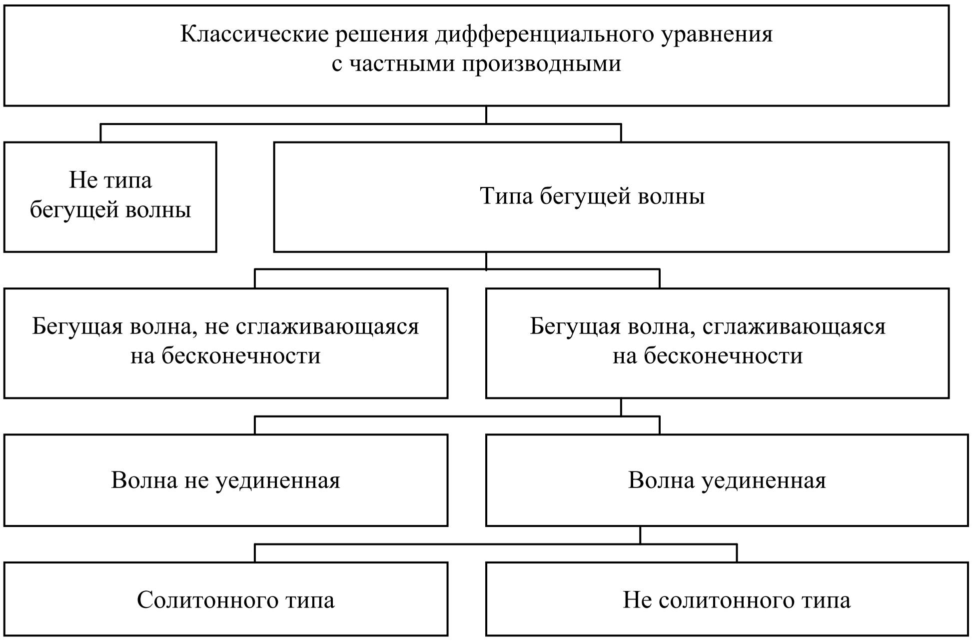

Рис. 1. Классификация решений

Займемся доказательством существования решения уравнения

$$\varphi_{tt}(x,t) = a^2 \cdot \varphi_{xx}(x,t) + b(x,t)\varphi_t(x,t) + f(\varphi(x,t)), \tag{4}$$

где $a = \text{const}$, $a \neq 0$, $|b(x,t)| < B$, $|b_x(x,t)| < B_1$, $|b_t(x,t)| < B_2$, $c = \text{const}$ при условиях

$$\varphi(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x),\ \varphi_t(x,t)|_{t=0} = \psi_1(x),\ -\infty < x < +\infty. \tag{5}$$

Предполагается, что функция f задана и дифференцируема на всей числовой оси, и ее производная ограничена:

$$|f'(\varphi)| < M; \tag{6}$$

$f(z)$ либо ограничена на всей оси, либо растет на бесконечности не быстрее линейной.

Введем новые переменные: $u = at - x + u_0$, $v = at + x$, где u_0 – некоторая постоянная; примем $z(u,v) = \varphi\left(\frac{v-(u-u_0)}{2}, \frac{v+(u-u_0)}{2a}\right)$.

Задача Коши (4), (5) примет вид

$$z_{uv}(u,v) = \varepsilon_1(u,v) z_u(u,v) + \varepsilon_2(u,v) z_v(u,v) + F(z(u,v)), \tag{7}$$

$$z(u,v)|_{u+v=u_0} = z_0(u), (z_v(u,v) + z_u(u,v))|_{u+v=u_0} = z_1(u). \tag{8}$$

Проинтегрировав (7) по треугольнику Δ' с вершинами в точках $(u; u-u_0)$, $(u;v)$, $(u_0 - v; v)$, получим

$$\int_{\Delta'} z_{uv}(\xi,\eta) d\xi d\eta = z(u,v) - z_0(u_0 - v) - \int_{u_0-v}^{u} z_u(\xi, u_0 - \xi) d\xi.$$

С другой стороны,

$$\int_{\Delta'} z_{uv}(\xi,\eta) d\xi d\eta = z(u,v) - z_0(u) - \int_{u_0-u}^{v} z_v(u_0 - \eta, \eta) d\eta.$$

Таким образом, имеем

$$2\int_{\Delta'} z_{uv}(\xi,\eta) d\xi d\eta = 2z(u,v) - z_0(u_0 - v) - z_0(u) -$$

$$- \int_{u_0-v}^{u} z_u(\xi, u_0 - \xi) d\xi - \int_{u_0-u}^{v} z_v(u_0 - \eta, \eta) d\eta. \tag{9}$$

Введя $\mu = u_0 - \eta$, получим

$$z(u,v) = \frac{1}{2}\left(z_0(u_0 - v) + z_0(u) + \int_{u_0-v}^{u} z_1(\xi) d\xi\right) +$$

$$+\iint_{\Delta'} \left(\varepsilon_1(\xi,\eta) z_u(\xi,\eta) + \varepsilon_2 z_v(\xi,\eta) + F(z(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta. \tag{10}$$

Используя (10), построим последовательные приближения:

$$z_{(n+1)}(u,v) = \frac{1}{2}\left(z_0(u_0 - v) + z_0(u) + \int_{u_0-v}^{u} z_1(\xi) d\xi\right) +$$

$$+\iint\limits_{\Delta'}\Big(\varepsilon_1(\xi,\eta)\big(z_{(n)}\big)_u(\xi,\eta)+\varepsilon_2\big(z_{(n)}\big)_v(\xi,\eta)+F\big(z_{(n)}(\xi,\eta)\big)\Big)d\xi d\eta. \qquad (11)$$

Справедливы утверждения:

1. Приближения (11) сходятся к решению интегральной задачи (10), если высота $\hat{h}$ треугольника удовлетворяет оценке

$$\hat{h}<\frac{a\sqrt{2}}{M}\left(\sqrt{4\big(B+a(b_1+b_2)\big)^2+2M}-2\big(B+a(b_1+b_2)\big)\right).$$

2. Приближения (11) сходятся к решению задачи Коши (7), (8).

Вернемся к исходной задаче. Она имеет решение $\phi(x,t)=$ $=z(at-x+u_0,at+x)$ в полосе

$$0<\frac{1}{a\sqrt{2}}\hat{h}<H=\frac{1}{M}\left(\sqrt{4\big(B+a(b_1+b_2)\big)^2+2M}-2\big(B+a(b_1+b_2)\big)\right).$$

Это эквивалентно утверждению: существует H такое, что для любого $0<h<H$ задача Коши (4), (5) имеет решение в полосе

$$0\le t\le h<H=\frac{1}{\sqrt{\big(B+a(b_1+b_2)\big)^2+M/2}+\big(B+a(b_1+b_2)\big)}.$$

Рассмотрим уравнение (4); примем $a=\mathrm{const}$, $a\neq 0$, $|b(x,t)|<B$, $|b_x(x,t)|<B_1$, $|b_t(x,t)|<B_2$, $c=\mathrm{const}$, f задана и дифференцируема на всей числовой оси, ее производная ограничена $|f'(\varphi)|<M$.

Снова поставим для (4) задачу Коши (5). Рассмотрим также уравнение

$$\varphi_{tt}(x,t)=a^2\cdot\varphi_{xx}(x,t)+f\big(\varphi(x,t)\big). \qquad (12)$$

Поставим для него ту же задачу Коши (5). Введем обозначения:

$$m=\max\left|\frac{1}{4a}b(x,y)\right|,\ n_1=\max\left|\frac{1}{8a^2}\big(b_y(x,y)-ab_x(x,y)\big)\right|,$$

$$n_2=\max\left|\frac{1}{8a^2}\big(b_y(x,y)+ab_x(x,y)\big)\right|,\ M=\max\left|\frac{1}{4a^2}f'\right|,$$

где $\varphi^*(x,t)$ – решение задачи Коши (4), (5); $\varphi(x,t)$ – решение задачи Коши (12), (5).

Теорема. Если $\varphi\neq 0$, то при приведенных выше условиях для любых x, t из полосы $0\le t\le h<H$ справедливо

$$\frac{\max\limits_{\Delta}|\varphi-\varphi^*|}{\max\limits_{\Delta}|\varphi|}\le\frac{8maH+2(n_1+n_2)a^2H^2}{1-2Ma^2H^2}, \qquad (13)$$

где Δ – треугольник с вершинами в точках $(x-at;0)$, $(x;t)$, $(x+at;0)$.

Таким образом, сделав обратную замену переменных, легко получим заявленную оценку.

Выводы

1. Доказано существование решения задачи Коши в полосе возмущенного уравнения Клейна – Гордона.

2. Получена оценка относительной погрешности решения задачи Коши в полосе при замене возмущенного уравнения Клейна – Гордона невозмущенным. А именно:

– чем ближе точка (u,v) к прямой, на которой заданы начальные условия, т.е. чем меньше h, тем ближе решения;

– чем меньше величины $\max|\varepsilon_1|$, $\max|\varepsilon_2|$, $\max|\varepsilon_{1u}|$, $\max|\varepsilon_{2v}|$, тем ближе решения.

3. Результаты исследований позволяют находить границы, при которых допустима замена малых по модулю постоянных ε_j нулем.

Список литературы

1. **Данилова, Е. А.** Некоторые вопросы, связанные с модификациями уравнения синус-Гордона : дис. … канд. физ.-мат. наук / Данилова Е. А. – М., 2012. – 71 с.
2. **Yakushevich, L. V.** Nonlinear physics of DNA / L. V. Yakushevich. – Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Signature, 1998.

References

1. Danilova E. A. *Nekotorye voprosy, svyazannye s modifikatsiyami uravneniya sinus-Gordona: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Some questions relating to modifications of sine-Gordon equations: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Moscow, 2012, 71 p.
2. Yakushevich L. V. *Nonlinear physics of DNA*. Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Signature, 1998.

Будылина Евгения Александровна
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра информационных систем и дистанционных технологий, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ) (Россия, г. Москва, ул. Большая Семеновская, 38)

Budylina Evgeniya Aleksandrovna
Candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, sub-department of information systems and distance technology, Moscow State University of mechanical engineering (MAMI) (38 Bol'shaya Semenovskaya street, Moscow, Russia)

E-mail: bud-ea@yandex.ru

УДК 517.95

Будылина, Е. А.

Исследование существования и анализ решения задачи Коши для возмущенного уравнения Клейна – Гордона / Е. А. Будылина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 25–30.